1. Теория (первый семестр)

Теорема. *Пусть K — полуалгебра элементарных множеств с σ-аддитивной мерой $m(\cdot)$, тогда класс измеримых по Лебегу множеств $L(K,m)$ образует σ-алгебру, а мера $\mu(\cdot)$ — продолжение $m(\cdot)$ на $L(K,m)$ — является σ-аддитивной.*

Определение. *Функция $F:[a,b)\to\mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной, если*

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0:\quad\sum_{i=i}^{n}b_i-a_i<\delta,\quad[a_i,b_i)\cap[a_j,b_j)=\emptyset,\forall i\neq j,\quad[a_i,b_i)\subset[a,b)\quad\Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|\leqslant\varepsilon.$$

Теорема (Егоров)**.** *Пусть $\mu(X)<\infty$, функции $f_n(x)$ измеримы, $f_n(x)\overset{п.в.}{\underset{X}{\to}}f(x)$. Тогда*

$$\forall\delta>0\quad\exists X_\delta\subseteq X:\quad\mu(X\setminus X_\delta)<\delta,\quad F_n(x)\underset{X_\delta}{\rightrightarrows}f(x).$$

Определение. *Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится по мере к функции f, если $\forall\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\left(|f_n-f|\geqslant\varepsilon\right)=0$.*

Теорема. *Пусть $\mu(X)<\infty$, тогда если $f_n(x)\overset{п.в.}{\underset{n\to\infty}{\to}}f$ на X, то $f_n\overset{\mu}{\underset{n\to\infty}{\to}}f$ на X.*

Теорема (Рисс)**.** *Пусть $f_n\overset{\mu}{\underset{n\to\infty}{\to}}f$ на X, тогда $\exists n_k$: $f_{n_k}(x)\overset{п.в.}{\underset{n_k\to\infty}{\to}}f(x)$ на X.*

Теорема. *Пусть функции $f_n(x)$ интегрируемы, $f_n\overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}}f$, тогда $f(x)$ интегрируема, и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f(x)\,d\mu$.*

Теорема (Об абсолютной непрерывности интеграла Лебега)**.** *Пусть $f(x)$ интегрируема, тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что когда $\mu(A)<\delta$, $A\subseteq X$ измеримо, то $\left|\int_A f(x)\,d\mu\right|<\varepsilon$.*

Теорема (Лебег)**.** *Пусть $f_n\overset{\mu}{\underset{n\to\infty}{\to}}f$ на X, функции f_n интегрируемы на X и существует интегрируемая мажоранта $F(x)$: $|f_n(x)|\leqslant F(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall$п.в. $x\in X$. Тогда $f(x)$ интегрируема, и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f(x)\,d\mu$.*

Теорема (Леви)**.** *Пусть $\mu(X)<\infty$, функции f_n интегрируемы по X, $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall$п.в. $x\in X$, кроме того, $\exists C$: $\int_X f_n(x)\,d\mu\leqslant C$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\overset{п.в.}{=}f(x)$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема, и $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu=\int_X f\,d\mu$.*

Теорема (Фату)**.** *Пусть $f_n(x)\geqslant0$, $\forall$п.в. $x\in X$, функции f_n интегрируемы по X, и $\exists C$: $\int_X f_n(x)\,d\mu\leqslant C$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Пусть $f(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, тогда $f(x)$ интегрируема, и $\int_X f(x)\,d\mu\leqslant C$.*

Теорема. *Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ в собственном смысле, тогда $f(x)$ интегрируема и по Лебегу, и*

$$(R)\int_{[a,b]}f(x)\,dx=(L)\int_{[a,b]}f(x)\,dx.$$

Теорема (Неравенство Гельдера)**.** *Пусть $f\in L_p$, $g\in L_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, тогда $h=f\cdot g\in L_1$, и*

$$\left|\int_X f\,g\,d\mu\right|\leqslant\|f\cdot g\|_{L_1}\leqslant\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_q}.$$

Пространство $L_p(K)$, K — компакт, сепарабельно; счетным всюду плотным множеством в нем являются многочлены с рациональными коэффициентами.

Пространство L_∞ несепарабельно (расстояние между функциями $1_A(x)$ равно единице).

Теорема (Разложение Жордана). *Пусть φ — заряд, тогда существуют X^+, X^- — положительное и отрицательное множества относительно X, такие, что $X = X^+ \sqcup X^-$.*

Определение. $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *называется функцией ограниченной вариации, если*

$$\exists C > 0 : \quad \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leqslant C, \quad \forall a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < b.$$

Наименьшая из констант C называется вариацией $\bigvee_a^b$ функции f на интервале $[a, b)$.

Теорема. *Любой непрерывной слева функции с ограниченной вариацией $F(t)$, $F(0) = 0$, соответствует заряд $\varphi(A)$, и наоборот.*

Теорема (Радон, Никодим). *Если заряд $\varphi(A)$ абсолютно непрерывен относительно меры μ, то существует интегрируемая функция $f = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu}$, такая, что $\varphi(A) = \int_A f \, d\mu$.*

Теорема. *Пусть функция f интегрируема по мере ν на X, существует $g = \dfrac{\partial \nu}{\partial \mu}$, тогда функция $f \cdot g$ интегрируема по мере μ на X, и*

$$\int_X f \, d\nu = \int_X f \cdot g \, d\mu = \int_X f \frac{\partial \nu}{\partial \mu} \, d\mu.$$

Теорема (Фубини). *Пусть X_1, X_2 — пространства с σ-аддитивными σ-конечными мерами μ_1, μ_2. Пусть $f(x, y)$ интегрируема на $X_1 \times X_2$ по $d\mu_1 \, d\mu_2$, тогда*

1. *для почти всех $x \in X_1$ существует $I(x) = \int_{X_2} f(x, y) \, d\mu_2$, и $I(x)$ интегрируема по μ_1 на X_1, причем*
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2 \right) \, d\mu_1;$$
2. *для почти всех $y \in X_2$ существует $J(y) = \int_{X_1} f(x, y) \, d\mu_1$, и $J(y)$ интегрируема по μ_2 на X_2, причем*
$$\int_{X_1 \times X_2} f(x, y) \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1 \right) \, d\mu_2$$
(то есть если существует двойной интеграл, то существуют и повторные, причем можно менять порядок интегрирования в повторных интегралах);
3. *если $f(x, y) \geqslant 0$ и существует один из повторных интегралов, то $f(x, y)$ интегрируема по $X_1 \times X_2$.*

Теорема (Хаусдорф). *Для любого метрического пространства M существует единственное с точностью до изометрии полное метрическое пространство $\tilde{M}$, такое, что*

1. *M изометрично $\tilde{M}_0 \subseteq \tilde{M}$;*
2. *$\tilde{M}_0$ плотно в $\tilde{M}$.*

Определение. *Замкнутое множество нигде не плотно, если оно не содержит ни одного шара. Произвольное множество нигде не плотно, если его замыкание нигде не плотно.*

Определение. *Множествами первой категории называются множества, представимые в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Остальные множества называются множествами второй категории.*

Теорема (Бэр). *Полное метрическое пространство не есть множество первой категории на самом себе.*

Теорема (Арцела, Асколи)**.** *Пусть K — компакт, тогда множество $E \subset C(K)$ предкомпактно в $C(K)$ тогда и только тогда, когда все функции из E равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Теорема (Рисс)**.** *Пусть K — компакт, тогда множество $E \subset L_p(K)$ предкомпактно в $L_p(K)$ тогда и только тогда, когда множество E ограничено в $L_p(K)$ и равностепенно непрерывно в $L_p(K)$:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p(K)} < \varepsilon, \quad \forall f \in E.$$

Теорема. *Множество $E \subset \ell_p$ предкомпактно тогда и только тогда, когда E ограничено, и*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \left(\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

Теорема. *Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — банахово пространство, тогда пространство $\mathcal{L}(X \to Y)$ также банахово.*

Теорема (Банах, Штейнгауз)**.** *Пусть $A_n \in \mathcal{L}(X \to Y)$; X, Y — линейные нормированные пространства, $E = \left\{ x \in X \;\middle|\; \varlimsup\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| < \infty \right\}$. Если множество E — второй категории, то $\sup\limits_{n \in N} \|A_n\| < \infty$.*

Следствие. *Пусть X — банахово, Y — линейное нормированное пространство, $\forall x \in X$: $\|A_n x\| \leqslant C(x) < \infty$. Тогда $\sup\limits_{n\in N} \|A_n\| < \infty$.*

Теорема. *Пусть X — банахово, $A \in \mathcal{L}(X \to X)$, $\|A\| < 1$, тогда оператор $E - A$ обратим.*

Теорема (Банах)**.** *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X \to Y)$ — биекция, тогда $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(Y \to X)$.*

Теорема (Хан, Банах)**.** *Пусть в банаховом пространстве X на подпространстве L задан линейный функционал $f_0(x)$, причем $f_0(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in L$, где $p(x)$ — выпуклый положительно однородный функционал, тогда $\exists f(x)$ — линейный функционал на X, такой, что $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in L$, и $f(x) \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$.*

2. Теория (второй семестр)

2.1. Гильбертовы пространства.

2.1.1. *Основные понятия. Теорема Леви.*

Определение. *Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.*

Определение. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Определение. *Полное бесконечномерное евклидово пространство называется гильбертовым пространством.*

Утверждение. $|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y)$ *(Неравенство Коши–Буняковского).*

Утверждение. *В гильбертовом пространстве выполняется тождество параллелограмма:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \equiv 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Если в банаховом пространстве выполняется тождество параллелограмма, то в нем можно ввести скалярное произведение:

$$(x,y) \equiv \frac{1}{4}\left\{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right\}.$$

Теорема (Об элементе с наименьшей нормой). *Пусть W — непустое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H. Тогда $\exists! x_0$:*

$$\|x_0\| = \inf_{x\in W} \|x\|.$$

Следствие. *Пусть $H_1 \subset H$ — линейное замкнутое подпространство гильбертова пространства H. Тогда*

$$\forall x_0 \in H \quad \exists! x_1 \in H_1 : \|x_1 - x_0\| = \inf_{y\in H_1} \|y - x_0\|.$$

Теорема (т. Леви об ортогональном разложении). *Пусть H — гильбертово пространство, H_1 — замкнутое линейное подпространство H,*

$$H_1^{\perp} = \{ x \in H \mid (x, y) = 0, \forall y \in H_1\}.$$

Тогда $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$, то есть

$$\forall x \in H \quad \exists! x_1 \in H_1, x_2 \in H_1^{\perp} : \quad x = x_1 + x_2.$$

2.1.2. *Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала.*

Лемма. *Пусть $f \not\equiv 0 \in H^*$, тогда $\dim(\ker f)^{\perp} = 1$.*

Теорема (Рисс). *$\forall f \in H^*$ $\exists! h \in H$: $f(x) = (x, h)$, $\forall x \in H$, причем $\|f\| = \|h\|$.*

Следствие. *Гильбертово пространство H сопряженно[1] изоморфно и изометрично пространству H^*.*

Следствие. *Гильбертово пространство рефлексивно, то есть $H \simeq H^{**}$.*

Следствие. *Гильбертово пространство слабо полное.*

Следствие. *В сепарабельном линейном нормированном пространстве из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Свойства слабо сходящихся последовательностей.

1. $\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow x_n \overset{\text{сл}}{\to} x$.
2. $\|x_n\| \to \|x\|$, $x_n \overset{\text{сл}}{\to} x \Rightarrow \|x_n - x\| \to 0$.
3. $x_n \overset{\text{сл}}{\to} x \Rightarrow \|x\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

2.1.3. *Полные и замкнутые системы.* Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, Z — конечное или счетное множество элементов H, $\mathcal{L}(Z)$ — линейная оболочка Z.

Определение. *Множество Z замкнуто в H, если $\overline{\mathcal{L}}(Z) = H$.*

Определение. *Множество Z полное в H, если $\mathcal{L}(Z)^{\perp} = 0$.*

Утверждение. *Полнота и замкнутость эквивалентны.*

Далее предполагаем, что $Z = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(e_k, e_j) = \delta_{kj}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$$

— частичная сумма ряда Фурье,

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Утверждение. *$S_n(x) - x \perp e_k$, $\forall k = 1, \ldots, n$.*

Утверждение. *$\min\limits_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \|x - P_n\| = \|x - S_n\|$.*

[1] т.е. если $f \leftrightarrow h$, то $\alpha f \leftrightarrow \bar{\alpha} h$.

Утверждение (Неравенство Бесселя). $\sum\limits_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$, $\forall n$, *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2$.

Утверждение (Равенство Парсеваля). *Тождество* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ *выполняется,* $\forall x \in H$, *тогда и только тогда, когда система* $\{e_k\}$ *полна.*

Утверждение. *В сепарабельном гильбертовом пространстве ортонормированная система не более чем счетна.*

В несепарабельном гильбертовом пространстве ортонормированная система может быть несчетной. Рассмотрим пространство функций вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n_x} a_k e^{i\alpha_k t}$$

со скалярным произведением

$$(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\overline{y(t)}\, dt,$$

пополненное по соответствующей норме[2]. Здесь несчетной ортонормированной системой будут функции $\left\{e^{i\alpha t}\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

2.1.4. *Изоморфизм в гильбертовых пространствах.*

Теорема (Фишер, Рисс). *Пусть* H *— сепарабельное гильбертово пространство,* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система, и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\exists! x \in H$: $(x, e_k) = c_k$.

Теорема. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует полная ортонормированная система.*

Теорема. *Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изометрией.*

2.1.5. *Пространство Соболева* W_2^1. Пусть $f(\cdot)$, $g(\cdot) \in C^1[a, b]$. Положим

$$(f, g)_{W_2^1(a,b)} = \int_a^b f(t)g(t)\, dt + \int_a^b f'(t)g'(t)\, dt, \quad \|f\|^2_{W_2^1(a,b)} = (f, f)_{W_2^1(a,b)}.$$

Пополнив $C^1[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_{W_2^1(a,b)}$, получим пространство Соболева $W_2^1(a, b)$.

Лемма. *Пусть* $f \in C^1[a, b]$, *тогда* $f^2(a) \leqslant C\|f\|_{W_2^1(a,b)}$, *причем* C *не зависит от* f.

Теорема. $W_2^1(a, b) \subset C[a, b]$.

Если $f_n \in C^1[a, b]$, $f_n \overset{W_2^1(a,b)}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$. Тогда существует $F \in L_2(a, b)$: $\|F - f_n'\|_{L_2(a,b)} \to 0$. Функция F называется обобщенной производной f: $F = f'$.

Теорема. *Вложение* $W_2^1(a, b) \subset C[a, b]$ *компактно, то есть если* $\{f_n\}$ *ограничена в* $W_2^1(a, b)$, *то из нее можно выделить сходящуюся в* $C[a, b]$ *подпоследовательность.*

---

[2]на лекциях рассматривалось пространство $L_2(-\infty, \infty)$, что неправильно, так как в нем при таком скалярном произведении из $\|x\| = 0$ не следует $x = 0$.

В общем случае:

$$\|f\|^p_{W^\ell_p(D)} = \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant\ell} \int_D |D^\alpha f|^p\, dt, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Пространство $W^\ell_2(D)$ является гильбертовым.

Теорема. $W^\ell_p(\mathbb{R}^n) \subset W^{[\rho]}_q(\mathbb{R}^m)$, $m \leqslant n$, $q > p$, $\rho = \ell - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} > 0$, $\|f\|_{W^{[\rho]}_q(\mathbb{R}^m)} \leqslant C\|f\|_{W^\ell_p(\mathbb{R}^n)}$.

2.2. **Линейный оператор в гильбертовом пространстве.**

2.2.1. *Сопряженный оператор. Вполне непрерывный оператор.*

Определение. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(A) = H$. *Оператор* $A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(A^*) = H$ *называется сопряженным к* A, *если* $\forall x, y \in H$ $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Теорема. *Если* $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(A) = H$, *то* $\exists! A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(A^*) = H$, $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение. *Оператор вполне непрерывен, если он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сходящуюся по норме.*

Определение. *Оператор компактен, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.*

Утверждение. *Линейный вполне непрерывный оператор непрерывен.*

Утверждение. *Компактный оператор — ограниченный оператор.*

Утверждение. *Пусть* $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, *тогда из* $x_n \overset{сл}{\to} x$ *следует* $Ax_n \overset{сл}{\to} Ax$.

Теорема. *Если* A *вполне непрерывен, то и* A^* *вполне непрерывен.*

Теорема. *Линейный оператор в гильбертовом пространстве вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он компактен.*

2.2.2. *Интегральный оператор.* Рассмотрим пространство $H = L_2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$Ax = \int_D K(t,s)x(s)\, ds, \quad \int_D \int_D |K(t,s)|^2\, dt\, ds = M^2 < \infty.$$

Теорема. $A \in \mathcal{L}(L_2(D) \to L_2(D))$.

Теорема. $A^*y = \int_D \overline{K(t,s)} y(t)\, dt$.

Теорема. *Интегральный оператор вполне непрерывен.*

2.2.3. *Теория Фредгольма.*

Теорема. $\exists a > 0$: $\|Lx\| \geqslant a\|x\|$, $\forall x \perp \ker L$.

Теорема. $R(L) = \overline{R(L)}$, $L = E - A$, A — *вполне непрерывный.*

Теорема. *Пусть* $B \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(B) = H$. *Тогда* $H = \ker B \oplus \overline{R(B^*)} = \ker B^* \oplus \overline{R(B)}$.

Пусть A — вполне непрерывный линейный оператор, $L = E - A$.

Лемма. $\dim \ker L^n < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Лемма. $\exists m \in \mathbb{N}$: $\ker L^n \neq \ker L^{n+1}$, $\forall n < m$, *и* $\ker L^n = \ker L^m$, $\forall n \geqslant m + 1$.

Теорема (1-я теорема Фредгольма). $Lx = y$ *разрешимо* $\forall y \in H$ *тогда и только тогда, когда* $\ker L = 0$.

Теорема (2-я теорема Фредгольма). $\dim \ker L = \dim \ker L^* < \infty$.

Теорема (3-я теорема Фредгольма). *Уравнение $Lx = y$ разрешимо тогда и только тогда, когда $y \perp \ker L^*$.*

Замечание. *Все три теоремы Фредгольма справедливы для уравнения $L_\lambda x = y$, $L_\lambda x = \lambda x - Ax$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.*

Перенести эти теоремы на все ограниченные операторы нельзя. Пусть, например, $H = \ell_2$, $Lx = (x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{L}(\ell_2 \to \ell_2)$. Уравнение $Lx = y$ разрешимо для всех $y \in \ell_2$ ($x = (0, y_1, y_2, \dots)$), но $\ker L = \{(x_1, 0, \dots, 0, \dots\} \neq 0$.

Интегральный оператор вполне непрерывен, поэтому к нему можно применить теорию Фредгольма. Уравнение $L_\lambda x = y$ записывается в виде

$$\lambda x - \int_D K(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \tag{1}$$

и справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (1) разрешимо для любой функции $y \in L_2(D)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение
$$\lambda x - \int_D K(t,s)x(s)\,ds = 0 \tag{2}$$
имеет только тривиальное решение.
2. Однородное уравнение (2) и сопряженное однородное уравнение
$$\bar{\lambda} z - \int_D \overline{K(t,s)}z(t)\,dt = 0 \tag{3}$$
имеют одинаковое конечное число линейно независимых решений.
3. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда для любого решения $z(t)$ сопряженного однородного уравнения (3) выполняется равенство
$$\int_D y(t)\bar{z}(t)\,dt = 0.$$

2.3. Спектральные вопросы линейных ограниченных операторов.

2.3.1. *Определение спектра.*

Определение. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X \to X)$, X — банахово пространство. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной, если*

1. $R(\lambda E - A) = X$*;*
2. $\ker(\lambda E - A) = 0$*;*
3. $\exists C > 0$*:* $\left\|(\lambda E - A)^{-1}\right\| \leqslant C$*.*

Определение. $R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}$ *— резольвента оператора A.*

Определение. $\rho(A)$ *— резольвентное множество — множество регулярных точек,* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ *— спектр оператора A.*

Для регулярности точки λ достаточно первых двух условий. Третье нужно для неограниченных операторов.

Классификация спектра для ограниченных операторов.

1. Если $\ker(\lambda E - A) \neq 0$, то λ — собственное значение. Множество собственных значений — точечный спектр.
2. Если $\ker(\lambda E - A) = 0$, но $R(\lambda E - A) \neq X$, $\overline{R(\lambda E - A)} = X$, то λ - точка непрерывного спектра.
3. Если $\ker(\lambda E - A) = 0$ и $\overline{R(\lambda E - A)} \neq X$, то λ — точка остаточного спектра.

Примеры.

1. $X = C[0,1]$, $Ax = tx(t)$. Здесь $[0,1]$ — точки остаточного спектра.
2. $X = L_p[0,1]$, $Ax = tx(t)$. Здесь $[0,1]$ — точки непрерывного спектра.
3. $X = \ell_2$, $Ax = (x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ — оператор сдвига. Здесь $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ — собственные значения, $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ — точки непрерывного спектра.

Теорема. *Если $A \in \mathcal{L}(X \to X)$, то множество $\{\lambda \mid |\lambda| > \|A\|\}$ состоит из регулярных точек оператора A.*

Теорема. *Если $\lambda \in \rho(A)$, то $\lambda + \Delta\lambda \in \rho(A)$ при условии, что $|\Delta\lambda| \, \|R_\lambda\| < 1$.*

Следствие. *Спектр замкнут, резольвентное множество открыто.*

Утверждение. $\|R_{\lambda+\Delta\lambda}\| \leqslant \dfrac{R_\lambda}{1 - |\Delta\lambda| \, \|R_\lambda\|}$.

Теорема (Тождество Гильберта). $R_\lambda - R_\mu = -(\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu = -(\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda$.

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, тогда $\sigma(A) \neq \emptyset$.*

2.3.2. *Спектр вполне непрерывного оператора.* Из первой теоремы Фредгольма следует, что для вполне непрерывного оператора условия $R(\lambda E - A) = H$ и $\ker(\lambda E - A) = 0$ равносильны.

Теорема. *Если $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, $\dim H = \infty$, то $0 \in \sigma(A)$.*

Теорема. *Если $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$, то λ — собственное значение.*

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, λ_k — собственные значения, $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \to \lambda$, тогда $\lambda = 0$.*

2.3.3. *Спектр самосопряженного оператора.*

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $A = A^*$, тогда*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| .$$

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$. Тогда A самосопряжен тогда и только тогда, когда $\Im(Ax, x) = 0$, $\forall x \in H$.*

Теорема. *Если $A = A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$, то $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Теорема. *Если $A = A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне ограниченный оператор, то $\sigma(A) \subset [m, M] \subset \mathbb{R}$, где*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Теорема. *Пусть $A = A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне ограниченный оператор, тогда*

$$\max_k |\lambda_k| = \|A\|.$$

Замечание. *Если $\dim H = \infty$, то $0 \in [m, M]$.*

Теорема (Гильберт, Шмидт). *Пусть $A = A^* \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, тогда в $\overline{R(A)}$ система собственных элементов A, соответствующих различным ненулевым собственным значениям, образует полную ортогональную систему.*

Следствие. *Если $\overline{R(A)} = H$, H — сепарабельное пространство, то система единичных собственных элементов A, отвечающих различным ненулевым собственным значениям, образует полную ортонормированную систему в H.*

Теорема (Гильберт, Шмидт). *Пусть $H = L_2(D)$, $\mu(D) < \infty$,*

$$Ax = \int_D K(t,s)x(s)\,ds, \quad K(t,s) = \overline{K(s,t)}, \quad \int_D |K(t,s)|^2\,ds \leqslant C, \quad \forall t \in D.$$

Пусть функция $y(t)$ истокообразно представима, то есть

$$y(t) = \int_D K(t,s)x(s)\,ds, \quad x \in H.$$

Тогда ряд Фурье для $y(t)$ по собственным функциям A сходится абсолютно и равномерно в D к $y(t)$.

2.3.4. *Проекторы Рисса.* Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $D(A) = H$. Пусть Γ — замкнутая гладкая кривая без самопересечений, $\rho(\Gamma, \sigma(A)) > 0$.

$$p_\sigma = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_\lambda\,d\lambda.$$

Если Γ не содержит внутри точек спектра, то $p_\sigma = 0$, а если Γ содержит внутри весь спектр, то $p_\sigma = E$.

Утверждение. *p_σ — проекционный оператор, то есть $p_\sigma^2 = p_\sigma$.*

Утверждение. *Пусть σ_1 — часть спектра, лежащая внутри Γ_1,*

$$p_{\sigma_1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} R_\lambda\,d\lambda,$$

$H_{\sigma_1} = p_{\sigma_1}H$. Тогда $p_{\sigma_1}A = Ap_{\sigma_1}$, причем, если A_{σ_1} — сужение A на H_{σ_1}, то $\sigma(A_{\sigma_1}) \subseteq \sigma_1$.

Утверждение. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, $\lambda_0 \in \sigma(A)$, $\lambda_0 \neq 0$, Γ содержит внутри только λ_0,*

$$p_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma R_\lambda\,d\lambda,$$

тогда $H_{\lambda_0} = p_{\lambda_0}H$ — конечномерное подпространство.

Определение. *Элемент $f \in H$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ_0, если $\exists n$: $(\lambda_0 E - A)^n f = 0$. Множество L_{λ_0} — корневое многообразие — множество корневых векторов.*

Если $L_{\lambda_0} = \overline{L_{\lambda_0}}$, то L_{λ_0} — корневое подпространство.
Если A — вполне непрерывный оператор, то $\dim L_{\lambda_0} < \infty$.

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ — вполне непрерывный оператор, $\lambda_0 \in \sigma(A)$, $\lambda_0 \neq 0$. Тогда $L_{\lambda_0} = H_{\lambda_0}$.*

Теорема. *Пусть $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{\frac{1}{n}} = r(A)$ — спектральный радиус, и $r(A) = \inf\limits_{n\geqslant 1}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.*

Теорема. *Если $A \in \mathcal{L}(H \to H)$, $\lambda > r(A)$, то $\lambda \in \rho(A)$.*

3. Задачи

Задача 31. *Найти сопряженный к оператору $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, если*

a) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$;
b) $Ax(t) = \int_0^t tx(s)\,ds$.

Доказательство. В обоих случаях:

$$Ax(t) = \int_0^t Q(t,s)x(s)\,ds = \int_0^1 \underbrace{1_{[0,t]}(s)Q(t,s)}_{K(t,s)}x(s)\,ds,$$

поэтому

$$A^*y(s) = \int_0^1 \overline{K(t,s)}y(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 1_{[0,t]}(s)\overline{Q(t,s)}y(t)\,dt = \int_0^1 1_{[s,1]}(t)\overline{Q(t,s)}y(t)\,dt = \int_s^1 \overline{Q(t,s)}y(t)\,dt.$$

a) $A^*y(s) = \int_s^1 y(t)\,dt$.
b) $A^*y(s) = \int_s^1 ty(t)\,dt$.

□

Задача 32. *Найти сопряженный к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$, если*

a) $Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$;
b) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$.

Доказательство. a) Оператор самосопряженный (см. задачу 39).
b)

$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1} = (x, y^*), \quad y^* = (y_2, y_3, \dots) = Ay.$$

□

Задача 33. *Найти сопряженный к оператору $A : \ell_2 \to \ell_2$, если*

a) $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| \leqslant 1$;
b) $Ax = (x_2, x_3, \dots)$.

Доказательство. a) Оператор самосопряженный (см. задачу 39).
b) $A^*y = (0, y_1, y_2, \dots)$ (см. задачу 32b).

□

Задача 34. *Какие из следующих операторов $A : C[0,1] \to C[0,1]$ являются вполне непрерывными:*

a) $Ax(t) = tx(t)$;
b) $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$; [3]
c) $Ax(t) = x(0) + tx(1)$;
d) $Ax(t) = \int_0^1 e^{ts}x(s)\,ds$;
e) $Ax(t) = x(t^2)$?

Доказательство. a) Нет, так как у этого оператора есть ненулевые точки остаточного спектра ($[0,1]$).
b) Да, так как это интегральный оператор.
c) Да, так как образ оператора конечномерный.
d) Да, так как это интегральный оператор.
e) Нет, так как у этого оператора существует обратный.

□

Задача 35. *Будет ли вполне непрерывным оператор $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$:*

$$Ax(t) = \tfrac{1}{2}\,[x(t) + x(-t)]?$$

Доказательство. Нет, не будет. Рассмотрим последовательность функций $x_k(t) = \cos kt$; она ограничена, однако ее образ ($Ax_k = x_k$) не является предкомпактным. □

Задача 36. *При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0,1]$ оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?*

---

[3] В оригинале верхний предел был 1, но похоже, что имелось в виду t

Доказательство. Рассмотрим множество функций $\{ f_{u,v} \in C[0,1] \mid f_{u,v} = sinu\,(x-v)\}$. Очевидно, что оно ограничено в $C[0,1]$, поэтому его образ должен быть предкомпактным, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x_1) f_{u,v}(x_1) - \varphi(x_2) f_{u,v}(x_2)| < \varepsilon, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Фиксируем x_1 и положим $v(x_1, x_2) = x_2$, $u(x_1, x_2) = \frac{\pi}{2(x_1 - x_2)}$. Тогда при $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ получим

$$|\underbrace{f_{u(x_1,x_2),v(x_1,x_2)}(x_1)}_{=1}\varphi(x_1) - \underbrace{f_{u(x_1,x_2),v(x_1,x_2)}(x_2)}_{=0}\varphi(x_2)| = |\varphi(x_1)| < \varepsilon,$$

следовательно, $\varphi(x_1) = 0$. Так как это верно для любого x_1, то $\varphi \equiv 0$. □

Задача 37. *Будет ли вполне непрерывным оператор* $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$, *если он рассматривается как действующий:*

a) $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$;
b) $A : C[0,1] \to C^1[0,1]$;
c) $A : C^2[0,1] \to C[0,1]$?

Доказательство. □

Задача 38. *Сформулировать критерий компактности в* ℓ_p. *Какие из следующих операторов* $A : \ell_2 \to \ell_2$ *вполне непрерывны:*

a) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$;
b) $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$;
c) $Ax = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$?

Доказательство. Критерий предкомпактности в ℓ_p: множество $D \subset \ell_p$ предкомпактно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geqslant N$, $\forall x \in D$:

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Пусть числа k_{mn} таковы, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |k_{ts}|^2 < \infty.$$

Рассмотрим оператор

$$Ax = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots), \quad \tilde{x}_m = \sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} x_n.$$

Пусть $D \subset \ell_2$ — ограниченное множество, $\|x\| \leqslant C$, $\forall x \in D$.

$$\sum_{m=M}^{\infty} \tilde{x}_m^2 = \sum_{m=M}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} k_{mn} x_n \right)^2 \leqslant \sum_{m=M}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |k_{mn}|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right) =$$

$$= \sum_{m=M}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |k_{mn}|^2 \right) \|x\|^2 \leqslant C^2 \sum_{m=M}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |k_{mn}|^2 \right) < \varepsilon,$$

то есть $A(D)$ — предкомпактное множество, следовательно, оператор A вполне непрерывен (пункты б, в).

a) Если A вполне непрерывен, то и A^* вполне непрерывен. $A^*x = (x_2, x_3, \dots)$, и его спектр $\sigma(A) = \{ \lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$, поэтому A^* не может быть вполне непрерывным.

□

Задача 39. *Доказать, что оператор* $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ *для* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$, *где* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$), $\sup_k |\lambda_k| < +\infty$, *есть самосопряженный оператор. При каком условии на последовательность* λ_k *он будет неотрицательным?*

Доказательство.

$$(Ax,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k x_k)y_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k(\lambda_k y_k)=(x,Ay).$$

Оператор будет неотрицательным, если $\lambda_k \geqslant 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. □

Задача 40. *Доказать, что оператор* $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = tx(t)$ *есть неотрицательный самосопряженный оператор.*

Доказательство. $(Ax,y) = \int_0^1 (tx(t))y(t)\,dt = \int_0^1 x(t)(ty(t))\,dt = (x,Ay)$, следовательно $A = A^*$.

$$(Ax,x)=\int_0^1 tx^2(t)\,dt \geqslant 0.$$

□

Задача 41. *Доказать, что оператор* $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{s+t}x(s)\,ds$ *есть неотрицательный самосопряженный оператор.*

Доказательство. $K(t,s) = e^{s+t} = e^{t+s} = \overline{K(s,t)}$, следовательно, оператор A является самосопряженным.

$$(Ax,x)=\int_0^1\int_0^1 e^{s+t}x(t)\,dt\,x(s)\,ds=\int_0^1 e^s x(s)\,ds\int_0^1 e^t x(t)\,dt=\left(\int_0^1 e^s x(s)\,ds\right)^2 \geqslant 0.$$

□

Задача 42. *Пусть число* $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ *фиксировано. Доказать, что разностный оператор* $A : L_2(-\infty,\infty) \to L_2(-\infty,\infty)$,

$$Ax(t)=\frac{1}{h}\left[x\left(t+\tfrac{h}{2}\right)-x\left(t-\tfrac{h}{2}\right)\right]$$

является самосопряженным.

Доказательство.

$$(Ax,y)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x\left(t+\tfrac{h}{2}\right)-x\left(t-\tfrac{h}{2}\right)\right]y(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t+\tfrac{h}{2}\right)y(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t-\tfrac{h}{2}\right)y(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}y\left(t-\tfrac{h}{2}\right)x(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}y\left(t+\tfrac{h}{2}\right)x(t)\ =-(x,Ay).$$

[???] □

Задача 43. *Пусть* A *— самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве* H*, причем* $A \neq 0$*. Доказать, что если существует ограниченный оператор* A^{-1}*, то обратный оператор тоже самосопряжен.*

Доказательство. Так как A самосопряжен, то $(Ax,y) = (x,Ay)$, $\forall x,y \in H$. Но тогда $\forall \tilde{x},\tilde{y} \in H$:

$$\left(AA^{-1}\tilde{x},A^{-1}\tilde{y}\right)=\left(A^{-1}\tilde{x},AA^{-1}\tilde{y}\right)\quad\Rightarrow\quad\left(\tilde{x},A^{-1}\tilde{y}\right)=\left(A^{-1}\tilde{x},\tilde{y}\right).$$

□

Задача 44. *Пусть* A *— ограниченный самосопряженный оператор,* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Im\lambda \neq 0$*, Доказать, что оператор* $(A-\lambda I)^{-1}$ *существует.*

Доказательство. Так как A — самосопряженный, то $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Поэтому если $\Im\lambda \neq 0$, то $\lambda \notin \sigma(A)$, следовательно, существует резольвента $R_\lambda = (\lambda E - A)^{-1}$. □

Задача 45. *Рассмотрим оператор* $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0,0,x_3,x_4,\dots)$ *для* $x = (x_1,x_2,x_3,\dots) \in \ell_2$*. Доказать, что* A *самосопряжен в* ℓ_2 *и* $A \geqslant 0$*. Найти оператор* $\sqrt{A}$*.*

Доказательство. $A = A^* \geqslant 0$ (см. задачу 39). $\sqrt{A} = A$. $\square$

Задача 46. *В вещественном линейном пространстве $C[-\pi,\pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора:*

a) $Ax(t) = x(-t)$;
b) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)\,ds$.

Доказательство. a) $\lambda x(t) = x(-t)$, $\lambda x(-t) = x(t)$, следовательно, если $x \neq 0$, то собственными значениями являются $\lambda = 1$ (собственные вектора — четные функции) и $\lambda = -1$ (собственные вектора — нечетные функции).

b) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi}(\cos s \cos t x(t) - \sin s \sin t x(t))\,dt = C_1(x)\cos s + C_2(x)\sin s$, поэтому собственные вектора будем искать в виде $x(t) = a\cos t + b\sin t$.

$$A(a\cos(t) + b\sin(t)) = \pi a\cos t - \pi b \sin t = \lambda a\cos(t) + \lambda b\sin t,$$

откуда $\lambda = \pi$, $b = 0$, то есть $x(t) = \cos t$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = \pi$.

$\square$

Задача 47. *В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0)+tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.*

Доказательство. $A^n x(t) = x(0) + t(x(1) + (n-1)x(0))$,

$$\|A^n x(t)\|_{C[0,1]} \leqslant |x(0) + t(x(1) + (n-1)x(0))| \leqslant |x(0)| + |t|\,(|x(1)| + (n-1)\,|x(0)|) \leqslant n+1,$$

поэтому $\|A^n\| = n+1$, откуда $r(A) = 1$.

$$(\lambda E - A)x(t) = \lambda x(t) - x(0) - tx(1) = y(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{y(t) + tx(1) + x(0)}{\lambda} = \tilde{x}(t).$$

Видно, что при $\lambda = 0$ резольвента не существует, поэтому $0 \in \sigma(A)$. Пусть теперь $\lambda \neq 0$, тогда

$$x(0) = \tilde{x}(0), \quad x(1) = \tilde{x}(1) \quad \Rightarrow \quad x(0) = \frac{y(0)}{\lambda - 1}, \quad x(1) = \frac{x(0) + y(1)}{\lambda - 1} = \frac{y(0) + y(1)(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2}.$$

Таким образом, при $\lambda = 1$ резольвента не существует, поэтому $1 \in \sigma(A)$. Спектр оператора — $\sigma(A) = \{0,1\}$, при всех остальных значениях λ:

$$R_\lambda y(t) = \frac{y(t) + tx(1) + x(0)}{\lambda} = \frac{y(0)(t+\lambda-1) + ty(1)(\lambda-1) + y(t)(\lambda-1)^2}{\lambda(\lambda-1)^2}.$$

$\square$

Задача 48. *Рассмотрим оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\sup_n |\lambda_n| < +\infty$. Найти $\sigma(A)$.*

Доказательство. $\ker(\lambda E - A) \neq 0$, когда $\lambda = \lambda_k$, поэтому $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — собственные значения. Так как спектр замкнут, то $\mathrm{cl}\,\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \sigma(A)$. С другой стороны, если $\lambda \notin \mathrm{cl}\,\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, то $(\lambda E - A)x = (\tilde{\lambda}_1 x_1, \tilde{\lambda}_2 x_2, \dots)$, причем $\min_k \left|\tilde{\lambda}_k\right| > 0$, поэтому оператор $\lambda E - A$ обратим, и λ не является точкой спектра. Получается, что $\sigma(A) = \mathrm{cl}\,\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$. $\square$

Задача 49. *Доказать, что оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ вполне непрерывен и найти его спектр.*

Доказательство. Вполне непрерывность — см. задачу 38. $\lambda = 0 \in \sigma(A)$, так как A — вполне непрерывный. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение, x — соответствующие ему собственный элемент, тогда

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) = (0, x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \dots),$$

откуда последовательно получается $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, и т.д., то есть $x = 0$, поэтому ненулевых собственных значений нет. Значение $\lambda = 0$ является точкой остаточного спектра, так как $\ker A = 0$, $\overline{R(A)} \subseteq \{\, x \mid x_1 = 0\} \neq \ell_2$. $\square$

Задача 50. *Доказать, что оператор* $A : L_2[-1, 1] \to L_2[-1, 1]$,

$$Ax(t) = \int_{-1}^{1} s^2 t x(t)\, dt,$$

вполне непрерывен и найти его спектр.

Доказательство. Оператор вполне непрерывный, так как он интегральный. Так как $Ax(t) = C(x)s^2$, где $C(x) = \int_{-1}^{1} tx(t)\, dt \in \mathbb{R}$, то собственные векторы нужно искать в виде $x(t) = Ct^2$. Но тогда $Ax(t) = Cs^2 \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$, то есть собственных векторов у оператора A нет, и спектр состоит из точки $\lambda = 0$. □

Задача 51. *Доказать, что оператор* $A : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$,

$$Ax(t) = \int_{0}^{1} st(1 - st)x(t)\, dt,$$

вполне непрерывен и найти его спектр.

Доказательство. Оператор вполне непрерывный, так как он интегральный.

$$Ax(t) = \int_0^1 stx(t)\, dt - \int_0^1 s^2 t^2 x(t)\, dt = C_1(x)s - C_2(x)s^2,$$

поэтому собственные элементы A нужно искать в виде $x(t) = at^2 + bt$.

$$A(at^2 + bt) = \left(-\frac{a}{5} - \frac{b}{4}\right) t^2 + \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right) t = \lambda(at^2 + bt),$$

откуда $\lambda = \dfrac{1}{15} \pm \dfrac{\sqrt{31}}{60}$. Так как оператор вполне непрерывный, то в спектр также входит точка $\lambda = 0$, и других точек спектра нет. □